

IDENTIFICAÇÃO DO MODELO DINÂMICO E CINEMÁTICO DE UM ROBÔ MÓVEL OMNI-DIRECCIONAL COM QUATRO RODAS

ANDRÉ SCOLARI CONCEIÇÃO*, A. PAULO MOREIRA*, PAULO J. COSTA*

**Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Universidade do Porto - Porto - Portugal.*

Emails: scolari@fe.up.pt, amoreira@fe.up.pt, paco@fe.up.pt

Abstract— This paper presents the kinematic and dynamic model of an omni-directional mobile robô with four wheels. Three methods of parameters identification related to dynamic equations are described, the parameters are the viscous frictions, the coulomb frictions and the inertia moment of the robô. A simulation environment, simulation results and real results are presented.

Keywords— Modelling, omni-directional mobile robô.

Resumo— Este artigo apresenta o modelo cinemático e dinâmico de um robô omni-direccional com quatro rodas. São descritos três métodos para a identificação dos parâmetros das equações do modelo dinâmico do robô. Os parâmetros identificados são os atritos viscosos, atritos de coulomb e o momento de inércia do robô. Um ambiente de simulação, resultados de simulação e com o robô são apresentados.

Palavras-chave— Modelagem de sistemas, robôs móveis omni-direccionais.

1 Introdução

A modelagem dinâmica de robôs móveis é essencial para o projeto de controladores, principalmente quando os robôs executam trajetórias com velocidades elevadas ou trajetórias com mudanças bruscas de direção e sentido, exigindo força máxima dos atuadores. Algumas estratégias de controle para robôs omni-direccionais usando o modelo dinâmico são discutidas em (Liu et al., 2003) e (Watanabe, 1998). Robôs omni-direccionais possuem a habilidade de simultaneamente e independentemente executar movimentos de translação e rotação, conforme detalhado em (Pin and Kilough, 1994). Entretanto, não linearidades, como por exemplo a saturação dos motores, podem comprometer o desempenho do robô, mais precisamente quando o robô está em aceleração. Este artigo apresenta a identificação do modelo dinâmico e cinemático de um robô omni-direccional onde estão modelados os elementos não-lineares e de restrições do robô. Serão apresentados três métodos para identificar os parâmetros das equações da dinâmica do robô. Os parâmetros são os atritos viscosos e de coulomb relacionados as velocidades lineares e de rotação do robô, e o momento de inércia do robô. Por fim, serão apresentados resultados de simulação, bem como a comparação com dados reais do robô.

O robô móvel omni-direccional com quatro rodas, apresentado na figura 1(a), foi construído pela equipa "5DPO" de robôs futebolistas, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal. Para a aplicação de futebol robótico o robô necessita executar trajetórias em altas velocidades e com perfeito posicionamento para o objetivo, como por exemplo no momento do posicionamento para a bola, ou para o gol. Sendo as-

sim, características dinâmicas de movimento são essenciais para seguir trajetórias perfeitamente.

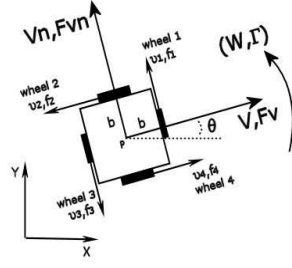
O artigo está organizado da seguinte forma: na secção 2, o modelo do robô omni-direccional é desenvolvido. Os métodos de identificação dos parâmetros do modelo são apresentados na secção 3. Um ambiente de simulação, resultados de simulação e com o robô são apresentados na secção 4. Na secção 5 são apresentadas as considerações finais.

2 Modelo do robô móvel

O modelo do robô móvel omni-direccional foi desenvolvido com base na dinâmica e cinemática de toda a estrutura incluindo os motores DC do robô. Na figura 1(b) ilustra-se as representações dos vetores de velocidades, posição do robô (P) e os eixos de coordenadas do robô e do mundo. Os seguintes símbolos em unidades SI (Sistema Internacional) são usados no modelo do robô:

- b [m] → distância entre o ponto P e as rodas
- M [kg] → massa do robô
- r [m] → raio das rodas do robô
- l → redução dos motores
- J [kg.m²] → momento de inércia do robô
- B_v, B_{vn} [N/(m/s)] → atritos viscosos nas direções das velocidades V e V_n
- B_w [N/(rad/s)] → atrito viscoso na direção da velocidade W
- B_{cv}, B_{cvn} [N] → atritos de coulomb nas direções das velocidades V e V_n
- B_{cw} [N.m] → atrito de coulomb na direção da velocidade W
- V, V_n [m/s] → velocidades lineares no robô
- W [rad/s] → velocidade angular no robô
- θ [rad] → posição angular do robô
- F_v, F_{vn} [N] → forças de tração no robô

- Γ [N.m] \rightarrow torque de rotação no robô
- v_1, v_2, v_3, v_4 [m/s] \rightarrow velocidades lineares nas rodas
- f_1, f_2, f_3, f_4 [N] \rightarrow força de tração nas rodas
- T_1, T_2, T_3, T_4 [N.m] \rightarrow torque nas rodas



(a) Robô móvel. (b) Parâmetros geométricos do robô.

Figura 1: Robô móvel Omni-Direccional.

2.1 Dinâmica do robô móvel

Segundo as coordenadas definidas na figura 1(b) e pelas leis de Newton derivam-se as equações de translação e rotação do robô móvel,

$$F_v(t) = M \frac{dV(t)}{dt} + B_v V(t) + C_v \text{sgn}(V(t)) \quad (1)$$

$$F_{vn}(t) = M \frac{dV_n(t)}{dt} + B_{vn} V_n(t) + C_{vn} \text{sgn}(V_n(t)) \quad (2)$$

$$\Gamma(t) = J \frac{dW(t)}{dt} + B_w W(t) + C_w \text{sgn}(W(t)) \quad (3)$$

em que,

$$\text{sgn}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Descreve-se as relações entre as forças de tração no robô e as forças de tração nas rodas como:

$$F_v(t) = f_4(t) - f_2(t) \quad (4)$$

$$F_{vn}(t) = f_1(t) - f_3(t) \quad (5)$$

$$\Gamma(t) = (f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t))b \quad (6)$$

A força de tração das rodas (f) e o torque das rodas (T), para cada motor DC, são representados por:

$$f(t) = \frac{T(t)}{r} \quad (7)$$

$$T(t) = l \cdot K_t \cdot i_a(t) \quad (8)$$

Sendo $i_a(t)$ a corrente do motor e K_t a constante do torque do motor. A dinâmica para cada motor DC pode ser descrita usando as seguintes equações,

$$u(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + K_v w_m(t) \quad (9)$$

$$T(t) = K_t i_a(t) \quad (10)$$

Onde L_a é a indutância do motor, R_a é a resistência do motor, $E_a(t)$ é a força contra electromotriz, $u(t)$ é a tensão aplicada ao motor, $w_m(t)$ é a velocidade angular do motor, k_v é a constante da força contra-electromotriz. O torque de saída do motor é linearmente relacionado com a corrente do motor pela constante do torque do motor K_t , conforme a equação 10. A constante do torque do motor K_t e a constante da força contra-electromotriz K_v em unidades do sistema SI (Sistema Internacional) são idênticas, veja dedução matemática em (Kuo, 1995): $K_t [\text{N.m/A}] = K_v [\text{Volts/(rad/seg)}]$. Com o motor DC em estado de regime permanente, ($L_a \frac{di_a}{dt} = 0$), pode-se simplificar a equação 9 como,

$$u(t) = R_a i_a(t) + K_v w_m(t) \quad (11)$$

Reorganizando a equação 11, temos

$$i_a(t) = \frac{u(t) - K_v w_m(t)}{R_a} \quad (12)$$

$$\frac{u(t)}{i_a(t)} = K_v \frac{w_m(t)}{i_a(t)} + R_a \quad (13)$$

Para obter as constantes K_v e R_a , pode-se usar a equação 13. Para cada tensão $u(t)$, mede-se a corrente do motor $i_a(t)$ e a velocidade angular $w_m(t)$ do motor em regime permanente.

2.2 Cinemática do robô móvel

A partir da geometria do robô é possível derivar as equações cinemáticas de movimento do robô, que relacionam as velocidades lineares das rodas do robô (v_1, v_2, v_3, v_4), as velocidades lineares (V e V_n) e a velocidade angular (W) do robô,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= V(t) \cos(\theta(t)) - V_n(t) \sin(\theta(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= V(t) \sin(\theta(t)) + V_n(t) \cos(\theta(t)) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} &= W(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_n(t) + bW(t) \\ v_2(t) &= -V(t) + bW(t) \\ v_3(t) &= -V_n(t) + bW(t) \\ v_4(t) &= V(t) + bW(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Sendo $x(t)$ e $y(t)$ a posição do ponto P , e $\theta(t)$ o ângulo de orientação do robô.

3 Identificação dos parâmetros do modelo

A identificação dos parâmetros relacionados as equações da dinâmica do robô móvel foi realizada de forma experimental. Os parâmetros a serem identificados são os atritos viscosos (B_v, B_{vn}, B_w), os atritos de coulomb (C_v, C_{vn}, C_w) e o momento de inércia J . A massa M do robô foi obtida com uma balança.

Foram utilizados três métodos para a identificação dos parâmetros, detalhados nas próximas

sub-seções. Os atritos viscosos e de coulomb foram identificados com os métodos 1 e 2. O momento de inércia do robô foi identificado de duas formas: combinando os métodos 1 e 2, e com o método 3. Sendo assim, usou-se dois métodos para identificar os atritos(1 e 2) e dois métodos para identificar o momento de inércia(1+2 e 3).

3.1 Método 1 - robô com velocidade em regime permanente

Neste método é possível identificar os atritos viscosos (B_v, B_{vn}, B_w) e de coulomb (C_v, C_{vn}, C_w) do robô. A ideia é aplicar no robô velocidades V, V_n e W com valores constantes, medindo-se a força de tração F_v, F_{vn} e o torque $\Gamma(t)$ aplicado ao robô. Uma vez que a velocidade do robô entre em regime permanente de funcionamento, isto é, seja constante, pode-se nas equações 1, 2 e 3 desconsiderar a parcela associada à massa e ao momento de inércia do robô, resultando as seguintes equações diferenciais:

$$F_v(t) = B_v V(t) + C_v \quad (16)$$

$$F_{vn}(t) = B_{vn} V_n(t) + C_{vn} \quad (17)$$

$$\Gamma(t) = B_w W(t) + C_w \quad (18)$$

Sendo assim, realizou-se três ensaios independentes: aplicou-se 4 velocidades diferentes V e calcularam-se as forças de tração F_v para cada velocidade. O mesmo foi feito para V_n e F_{vn} , e para W e Γ . As forças e torques resultantes, na tabela 1, foram calculadas com base nas correntes medidas dos motores do robô, utilizando as equações 4 a 8. Na figura 2 apresenta-se a curva de velocidade do robô na direção da velocidade V , e as correntes correspondentes aos motores 2 e 4.

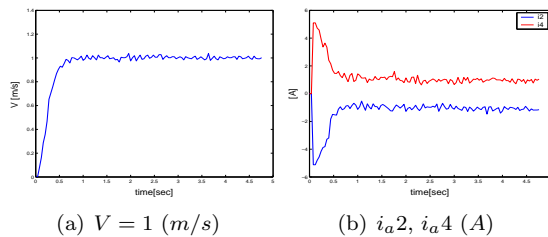


Figura 2: Velocidade e correntes - ensaio 1.

V (m/s)	F_v (N)	V_n (m/s)	F_{vn} (N)	W (rad/s)	Γ (N.m)
0.6	30.585	0.6	30.285	0.6	5.556
0.8	31.459	0.8	30.814	0.8	5.730
1	31.874	1	31.174	1	5.842
1.2	32.765	1.2	32.106	1.2	6.009

Tabela 1: Velocidades aplicadas e forças e torque resultante.

Com os valores das velocidades e das forças podem-se calcular os atritos viscosos e de coulomb. Verifica-se que as equações 16, 17 e 18 são

idênticas a equação de uma reta ($y = mx + b$). Utilizou-se os mínimos quadrados para ajustar uma reta aos resultados obtidos. A figura 3 mostra gráficos das velocidades aplicadas e as forças resultantes, assim como a reta de ajuste calculada. As equações resultantes com os atritos estimados são apresentadas na tabela 2.

	Equações	B_v, B_{vn} B_w	C_v, C_{vn} C_w
V	$F_v(t) = 3.45V(t) + 28.55$	3.45	28.55
V_n	$F_{vn}(t) = 2.90V_n(t) + 28.46$	2.90	28.46
W	$\Gamma(t) = 0.73W(t) + 5.12$	0.73	5.12

Tabela 2: Equações e atritos - método 1.

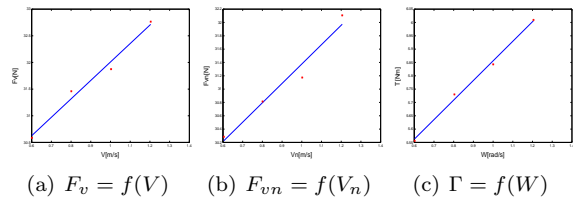


Figura 3: Forças e torque versus velocidades.

3.2 Método 2 - robô com tração nula

No segundo método utilizou-se a variação de velocidade com forças nulas para calcular os atritos viscosos (B_v e B_{vn}) e de coulomb (C_v e C_{vn}). Primeiramente aplicou-se uma velocidade constante no robô, então desligou-se os motores, resultando em correntes nulas e consequentemente forças nulas, provocando um decréscimo na velocidade do robô até parar.

A partir das equações 1, 2 e 3 com forças e torque nulos e reorganizando as equações, temos as seguintes equações diferenciais para velocidades positivas:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{B_v}{M} V(t) - \frac{C_v}{M} \quad (19)$$

$$\frac{dV_n(t)}{dt} = -\frac{B_{vn}}{M} V_n(t) - \frac{C_{vn}}{M} \quad (20)$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = -\frac{B_w}{J} W(t) - \frac{C_w}{J} \quad (21)$$

Foram realizados 3 ensaios separadamente, para V, V_n e W . A partir das curvas de velocidades, calculou-se as acelerações. Na figura 4 apresentam-se os gráficos de velocidades dos ensaios realizados. Nos gráficos da figura 5 apresenta-se o conjunto de dados da velocidade e a aceleração calculada para realizar os cálculos de estimativa dos atritos.

Com este método é necessário ter-se o valor da massa M e momento de inércia J do robô para se calcular o atrito viscoso e de coulomb. Como *a priori* não se tem o valor do momento de inércia J , obteve-se primeiramente uma estimativa de J com

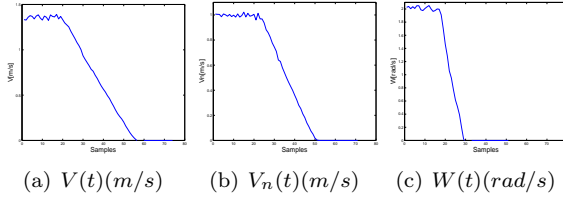


Figura 4: Curvas de velocidades.

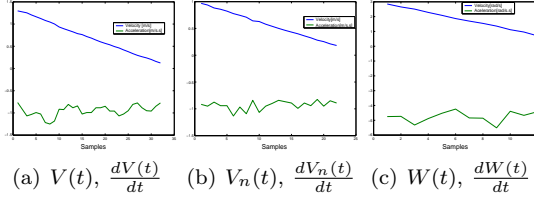


Figura 5: Velocidades e acelerações.

o auxílio dos valores de atrito viscoso B_w e de coulomb C_w calculados com o método 1, utilizando-se a equação 21 e a curva de velocidade $W(t)$ apresentada na figura 4(c). Para o cálculo do momento de inércia J , pode-se reorganizar a equação 21 de forma a isolar J ,

$$J = -\frac{W(t)}{\frac{dW(t)}{dt}} B_w - \frac{C_w}{\frac{dW(t)}{dt}} \quad (22)$$

Com os vectores de valores de W e $\frac{dW}{dt}$ (figura 5(c)) e com os atritos viscoso B_w e de coulomb C_w , calculou-se valores de J , e fazendo a sua média obteve-se o valor de $J = 1.358[kg.m^2]$.

Com os valores de massa do robô e curvas de velocidades e acelerações dos ensaios (figuras 5(a) e 5(b)), calculou-se os atritos viscosos(B_v e B_{vn}) e atritos de coulomb(C_v e C_{vn}), aplicando mínimos quadrados nas equações 19 e 20. As equações resultantes com os atritos estimados para V e V_n são apresentados na tabela 3.

	Equações	B_v, B_{vn}	C_v, C_{vn}
V	$\frac{dV(t)}{dt} = -0.11V(t) - 0.86$	4.01	30.35
V_n	$\frac{dV_n(t)}{dt} = -0.10V_n(t) - 0.87$	3.77	30.76

Tabela 3: Equações e atritos - método 2.

3.3 Método 3 - Identificação do momento de inércia

A identificação do momento de inércia J do robô foi realizada de forma experimental. O robô foi suspenso por um fio, para eliminar qualquer atrito do robô com o chão, conforme a figura 6. Aplicou-se um torque($\Gamma(t)$) conhecido ao corpo do robô, medindo-se a posição angular($\theta(t)$) através de um sistema de odometria externa, baseado em visão, fixado acima do robô. Foi fixado ao robô um disco de acrílico, por onde passa um fio preso em uma

extremidade ao próprio disco e na outra a um objecto com massa mo . O disco de acrílico possui um raio(rm) de $0.25[m]$. Com base na equação

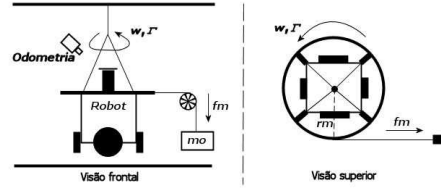


Figura 6: Esquemático da experiência.

que rege o movimento de rotação do robô,

$$\Gamma(t) = J \frac{dW(t)}{dt} + B_w W(t) + B_{cw} \text{sgn}(W(t)) \quad (23)$$

é possível calcular o valor de J , com os valores de atritos(B_w e B_{cw}) nulos, obtêm-se:

$$\Gamma(t) = J \frac{dW(t)}{dt} \quad (24)$$

Para esta experiência o torque é definido como:

$$\Gamma(t) = f_m(t).rm \quad (25)$$

onde,

$$f_m(t) = mo.g \quad (26)$$

sendo $f_m(t)$ a força aplicada e g a aceleração da gravidade($\approx 9.8[m/s^2]$). Foram realizados 4 ensaios para identificar o valor de J . Nos ensaios 1,2 e 3 utilizou-se um objecto(mo) com massa igual a $0.510 Kg$. No ensaio 4 utilizou-se um objecto com massa igual a $1 Kg$. Sendo assim, validou-se a repetibilidade da experiência com torques iguais e diferentes.

A figura 7(a) apresenta a curva das posições angulares, obtidas pelo sistema de odometria externo. A velocidade angular(W), figura 7(b), foi calculada a partir da derivada da curva das posições angulares. Através do método de mínimos quadrados, calculou-se uma reta que melhor se ajusta na curva de velocidade angular, e partir desta reta retira-se a aceleração angular para cada ensaio. Na tabela 4 apresenta-se os valores de torque, aceleração angular e os valores obtidos do momento de inércia.

	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Ensaio 4
Γ	1.2495	1.2495	1.2495	2.4500
$\frac{dW(t)}{dt}$	0.9126	0.8942	0.8947	1.7512
J	1.3691	1.3974	1.3965	1.3990

Tabela 4: Momentos de Inércia.

3.4 Comparando métodos

Na tabela 5 apresentam-se os atritos estimados com os dois métodos, verifica-se que houve uma

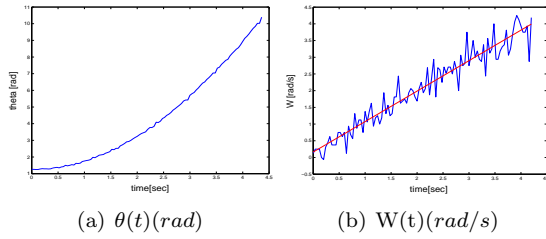


Figura 7: Primeiro ensaio.

pequena diferença entre os valores, considerada aceitável, levando-se em conta que os métodos utilizados foram realizados em condições experimentais difíceis. Por exemplo os valores de corrente e velocidades lidos dos motores possuem um ruído considerável, qualquer irregularidade no chão onde foram executados os ensaios podem provocar uma pequena alteração nos parâmetros estimados. Sendo assim serão utilizados no modelo do robô a média dos parâmetros estimados. Na identificação do momento de inércia do robô, tabela 6, verifica-se que se obteve valores similares com os dois métodos.

Atritos	Viscoso			Coulomb		
	B_v	B_{vn}	B_w	C_v	C_{vn}	C_w
Método 1	3.45	2.90	0.73	28.55	28.46	5.12
Método 2	4.01	3.77	-	30.35	30.76	-
Média	3.73	3.34	0.73	29.45	29.61	5.12

Tabela 5: Atritos estimados.

	Momentos de inércia
Métodos 1+2	1.358
Métodos 3 (média)	1.390
Média	1.374

Tabela 6: Momentos de inércia estimados.

4 Resultados reais e de simulação

Nesta secção será apresentada a simulação do modelo completo do robô, utilizando os parâmetros estimados nas secções anteriores. Na figura 8 apresenta-se o ambiente de simulação do robô móvel, implementado no software Matlab/Simulink. O ambiente está dividido em 3 blocos principais: modelo cinemático, drive-motores e modelo dinâmico.

A sintonia dos controladores PID são discutidas em (Conceicao et al., 2005). Foram realizadas 3 simulações (figuras 9, 10 e 11), usando as seguintes velocidades de referência para o robô:

- $V = 1[m/s]$, $V_n = 0[m/s]$, $W = 0[rad/s]$;
- $V = 0[m/s]$, $V_n = 1[m/s]$, $W = 0[rad/s]$;
- $V = 0[m/s]$, $V_n = 0[m/s]$, $W = 1[rad/s]$.

As Figs. 9(a), 10(a) and 11(a) apresentam as velocidades reais e de simulação com o robô.

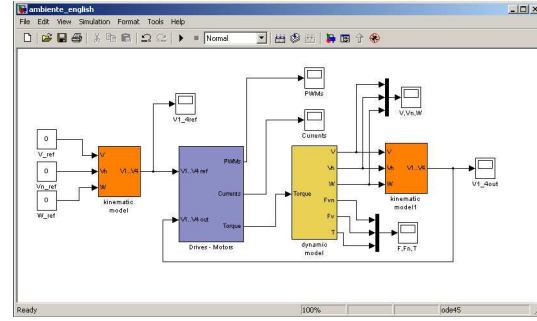
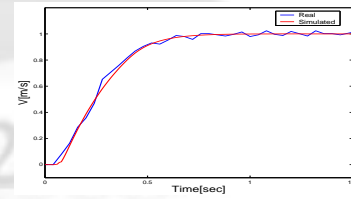
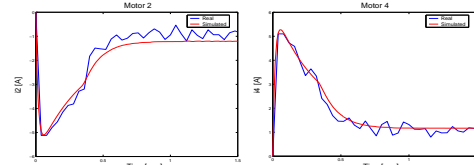


Figura 8: Ambiente de simulação no Matlab/Simulink.

Os resultados de simulação são muito similares aos reais quer em regime transitório quer em regime permanente. Nas Figs. 9(b), 9(c), 10(b) e 10(c) pode-se verificar algumas não-linearidades do robô, devido a saturação dos sinais de PWM, mostrados nas Figs. 9(d), 9(e), 10(d) and 10(e). As correntes simuladas e reais tem uma boa aproximação, porque as não-linearidades estão modeladas. Na simulação 3, Fig. 11, os motores não saturam facilmente, comparado às outras simulações, isso deve-se ao fato que são os 4 motores exercendo forças simultaneamente. Tal fato faz com que o regime transitório seja mais rápido.

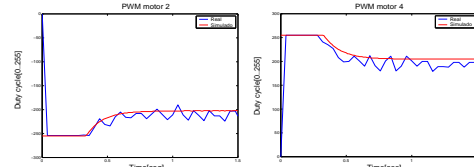


(a) Velocidade $V(m/s)$ real e simulada.



(b) Corrente $i2(A)$

(c) Corrente $i4(A)$



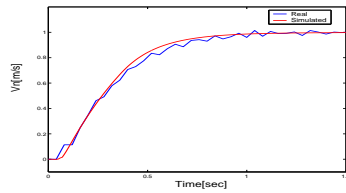
(d) PWM motor 2

(e) PWM motor 4

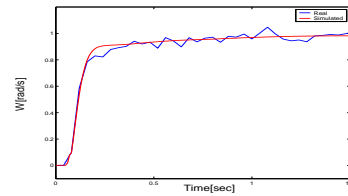
Figura 9: Velocidade $V = 1$, simulação 1.

5 Conclusões

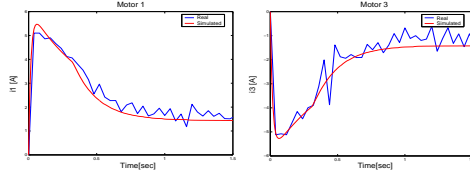
O artigo apresentou três métodos para identificar os parâmetros do modelo dinâmico de um



(a) Velocidade $V_n(m/s)$ real e simulada.

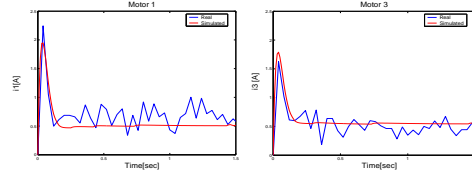


(a) Velocidade $W(rad/s)$ real e simulada.



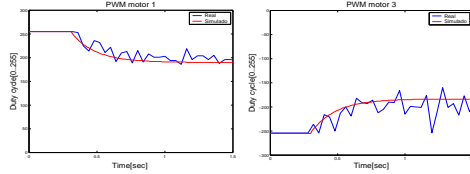
(b) Corrente $i1(A)$

(c) Corrente $i3(A)$



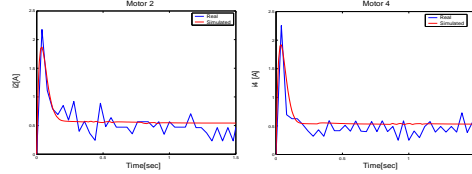
(b) Corrente $i1(A)$

(c) Corrente $i3(A)$



(d) PWM motor 1

(e) PWM motor 3



(d) Corrente $i2(A)$

(e) Corrente $i4(A)$

Figura 10: Velocidade $V_n = 1$, simulação 2.

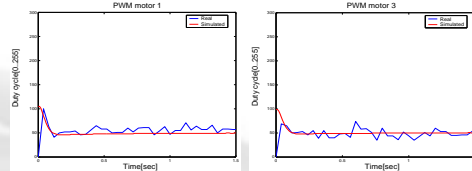
robô omni-direccional com quatro rodas. O modelo apresentado consegue representar não-linearidades, como saturação dos motores e ação dos atritos nas velocidades do robô. Esse elementos são muito importantes no projeto de controladores, principalmente quando o robô executa trajetórias com mudanças bruscas de direção e posição angular, onde são necessárias acelerações e velocidades máximas.

Agradecimentos

O autor André Scolari Conceição tem o apoio do Programa Al β an, Programa de bolsas de alto nível da União Europeia para América Latina, bolsa nº E04D028256BR.

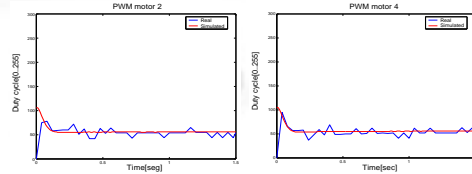
Referências

- Conceicao, A. S., Moreira, A. P. and Costa, P. J. (2005). Control and model identification of a mobile robot's motors based in least squares and instrumental variable methods, *11th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics - MMAR 2005*.
- Kuo, B. C. (1995). *Automatic Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc.
- Liu, Y., Wu, X., Zhu, J. J. and Lew, J. (2003). Omni-directional mobile robot controller design by trajectory linearization, *Proceedings*



(f) PWM motor 1

(g) PWM motor 3



(h) PWM motor 2

(i) PWM motor 4

Figura 11: Velocidade $W = 1$, simulação 3.

of the American Control Conference 4: 3423 – 3428.

- Pin, F. G. and Killough, S. M. (1994). A new family of omnidirectional and holonomic wheeled platforms formobile robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 10: 480–489.
- Watanabe, K. (1998). Control of ominidirectional mobile robot, *2nd Int. Conf. on Knowledge-Based Intelligent Electronic Systems*.